

مجموعه‌های برابر

به نام خدا

تا اینجا با مفهوم مجموعه آشنا شدیم، حالا می‌فروایم بینیم چه موقع دو تا مجموعه با هم برابرند؟ نظر خودتون چیه؟

فرض کنید دو تا مجموعه A و B داریم، زمانی می‌گیم این دو تا مجموعه با هم برابرند که عضوهای این دو تا مجموعه با هم برابر باشن، یعنی هر عضوی که در مجموعه A هست در B هم باشه و هر عضوی هم که در B هست در مجموعه A هم وجود داشته باشه. به سوال زیر توجه کنید:

مجموعه A شامل سه عدد طبیعی متوالی است که حاصل جمع آنها برابر ۲۷ است، ابتدا A را با عضوهای آن بنویسید:

$$A = \{ 1, 9, 10 \}$$

سپس مجموعه‌هایی را مشخص کنید که در زیر مشخص شده و با A برابر است:

الف: مجموعه عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰

عددهای طبیعی بین ۶ و ۱۰ چیا میشن؟ ۷ و ۸ و ۹. حالا مجموعه‌ش رو تشکیل میدیم: $\{ 7, 8, 9 \}$ ، آیا این مجموعه با مجموعه A برابره؟

نگاه می‌کنیم بینیم عضوهای دو تا مجموعه با هم برابرند یا نه؟ توی این مجموعه عدد ۷ رو داریم ولی توی مجموعه A عدد ۷ نداریم. پس با همین می‌تونیم نتیجه بگیریم که

این دو تا مجموعه برابر نیستن. (یه دلیل دیگه هم اینه که ما در مجموعه A عدد ۱۰ رو داریم ولی توی این مجموعه ۱۰ نداریم)

ب: مجموعه عددهای طبیعی بزرگتر از ۷ و کوچکتر از ۱۱

این مجموعه به این صورت میشه؟ $\{1, 9, 10\}$. فب به نظرتون این مجموعه با A برابره؟ آگه عضوهای این دو تا مجموعه رو با هم مقایسه کنیم می بینیم که دقیقاً با هم برابرن. پس این مجموعه با مجموعه A برابره.

ج: مجموعه سه عدد طبیعی متوالی که میانگین آنها برابر ۹ است.

تنها مجموعه ای که با این خصوصیات می تونیم بنویسیم این مجموعه س $\{1, 9, 10\}$ ، که اعضایش با مجموعه A برابره پس این دو تا مجموعه با هم برابرن.

آگه دو مجموعه A و B با هم برابر باشن می نویسیم $A = B$ و آگه با هم برابر نباشن می نویسیم $A \neq B$.

کار در کلاس

بایهای فالی را در مجموعه های زیر طوری پر کنید که مجموعه ها برابر باشند:

$$\left\{ 5, \dots, \frac{2}{5}, 4, \frac{9}{3} \right\} = \left\{ \frac{2}{5}, 3, \frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2}, \dots, \sqrt{25} \right\} ($$

برای اینکه به اشتباه نیفتیم بهتره که تا جایی که می‌تونیم عددها رو ساده کنیم.

الان توی مجموعه سمت چپ می‌تونیم به جای $\frac{9}{3}$ ، بنویسیم ۳. پس مجموعه سمت چپ به این صورت میشه: $\{ 5, -, \frac{2}{5}, 4, 3 \}$

توی مجموعه سمت راست داریم:

$$\sqrt{25} = 5$$

$$\frac{-\sqrt{144}}{(-2)^2} = \frac{-12}{4} = -3$$

پس مجموعه‌ها مون به صورت زیر میشن:

$$\{ 5, -, \frac{2}{5}, 4, 3 \} = \{ \frac{2}{5}, 3, -3, -, 5 \}$$

حالا واسه اینکه راحت متوجه بشیم، میایم عددهایی که توی دو تا مجموعه برابرن رو هم‌رنگ می‌کنیم:

$$\{ 5, -, \frac{2}{5}, 4, 3 \} = \{ \frac{2}{5}, 3, -3, -, 5 \}$$

می‌بینیم که توی مجموعه سمت راست ۳- داریم که در مجموعه سمت چپ وجود نداره و در مجموعه سمت چپ ۴ داریم که در مجموعه سمت راست نیست. پس برای اینه دو تا مجموعه با هم برابر بشن باید بنویسیم:

$$\{ 5, -3, \frac{2}{5}, 4, 3 \} = \{ \frac{2}{5}, 3, -3, 4, 5 \}$$

زیرمجموعه‌ها

مجموعه‌های A و B رو در نظر بگیرید. آگه هر عضو مجموعه A در مجموعه B هم وجود داشته باشه، در اون صورت می‌گیم A زیرمجموعه B هست و اون رو به صورت $A \subseteq B$ نمایش می‌دیم.

مجموعه‌های زیر رو در نظر بگیرید:

$$A = \{1, 3, 5\}$$

$$B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$$

می‌توایم بینیم آیا A زیرمجموعه B هست یا نه؟ یکی یکی عضوای A رو نگاه می‌کنیم بینیم توی B هم هست یا نه؟

عدد ۱ عضو مجموعه A هست، آیا عضو B هم هست؟ بله

عدد ۳ عضو مجموعه A هست، آیا عضو B هم هست؟ بله

عدد ۵ عضو مجموعه A هست، آیا عضو B هم هست؟ بله

الان دیگه مجموعه A عضوی نداره که بفوایم درباره‌ش این سوال رو پرسیم. وقتی درباره همه اعضا سوال پرسیدیم، می‌ریم جوابا رو نگاه می‌کنیم آگه جواب همه "بله" بود، معنیش اینه که هر عضوی که در A بوده در B هم هست، یعنی

$$A \subseteq B$$

اما آگه حتی یکی از جوابامون "نه" بود یعنی A زیرمجموعه B نیست.

یه مثال دیگه:

عبارت زیر درست است یا نادرست؟

$$\{-1, 0, 1, 3\} \subseteq \{4, 3, 0, 1, -1, 2\}$$

باید بررسی کنیم ببینیم آیا همه اعضای مجموعه سمت چپ در مجموعه سمت راست وجود دارن یا نه؟

عدد ۳ در مجموعه سمت راست وجود داره یا نه؟ بله

عدد ۱ در مجموعه سمت راست وجود داره یا نه؟ بله

عدد ۰ در مجموعه سمت راست وجود داره یا نه؟ بله

عدد -۱ در مجموعه سمت راست وجود داره یا نه؟ بله

در مورد همه اعضای مجموعه سمت چپ این سوال رو پرسیدیم، آیا همه جوابها "بله" هست؟ بله. پس مجموعه سمت چپ زیرمجموعه سمت راست هست، پس این عبارت درسته.

درباره درستی عبارت زیر تحقیق کنید:

$$\{a, b, d\} \subseteq \{a, b, c, a\}$$

آیا a در مجموعه سمت راست وجود دارد؟ بله

آیا b در مجموعه سمت راست وجود دارد؟ بله

آیا d در مجموعه سمت راست وجود دارد؟ **خیر**

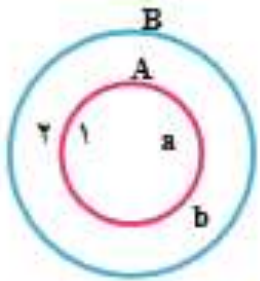
ما عضو در مجموعه سمت چپ پیدا کردیم که در مجموعه سمت راست وجود نداشت، بنابراین عبارت بالا نادرسته.

برای آنکه نشون بدیم مجموعه A زیرمجموعه B نیست، از نماد $\not\subseteq$ استفاده می‌کنیم و می‌نویسیم $A \not\subseteq B$. مثلاً در مورد سوال بالا باید بنویسیم:

$$\{a, b, d\} \not\subseteq \{a, b, c, a\}$$

اگر یادتون باشه گفتیم مجموعه‌ها رو هم می‌تونیم با آکلاز نشون بدیم هم با نمودار ون حالا می‌فویام مفهوم زیرمجموعه بودن رو با نمودار ون نشون بدیم، شکل زیر رو ببینید:

مجموعه B رو با دایره آبی و مجموعه A رو با دایره قرمز نشون داریم



می‌تونیم اعضای مجموعه A و B رو بنویسیم:

$$B = \{1, a, b, 2\}$$

$$A = \{a, 1\}$$

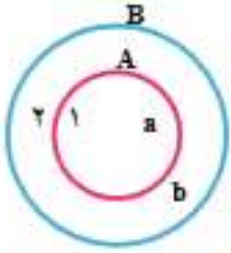
اگر به این مجموعه‌ها نگاه کنید می‌بینید که مجموعه A دو تا عضو a و 1 داره، که هر دو در مجموعه B هم وجود دارن، بنابراین $A \subseteq B$.

میفویام بینیم آیا همیشه بدون اینکه اعضای مجموعه ها رو بنویسیم فقط از روی شکل تشخیص بدیم A زیرمجموعه B هست یا نه؟

بله همیشه و خیلی راحت تر هست 😊

یه بار دیگه به شکل نگاه کنید، چون مجموعه A کاملاً داخل (توی دل) مجموعه B قرار گرفته پس هی چی که توی A باشه توی B هم هست،

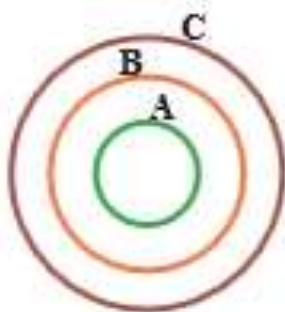
بنابراین $A \subseteq B$.



حالا به نظر شما آیا B زیرمجموعه A هست؟ واسه اینکه بینیم هست یا نه، نگاه می کنیم بینیم آیا B توی دل A هست؟ آگه بود میگیم $B \subseteq A$ و آگه نبود میگیم $B \not\subseteq A$.
خب همینطور که میبینید B توی دل A نیست. پس B زیرمجموعه A نیست.

مثال:

با توجه به نمودار مقابل، دلیل درستی یا نادرستی عبارات زیر را تعیین کنید:



الف: $A \not\subseteq C$


نگاه می‌کنیم ببینیم A توی دل C هست یا نه؟ هست. پس $A \subseteq C$.

ب: $B \subseteq A$

آیا B توی دل A هست؟ خیر. پس $B \not\subseteq A$.

ج: $C \not\subseteq A$

آیا C توی دل A هست؟ نه. پس $C \not\subseteq A$



نمایش مجموعه
های اعداد

تا اینجا ما دو روش برای نمایش مجموعه ها یاد گرفتیم، یکی نوشتن اعضا داخل آنگار و یکی هم نمودار ون، حالا می‌فوایم به روش جدیدتر یاد بگیریم قبل از اینکه ادامه درس رو بگیریم، به مطلب رو از سال گذشته یادآوری می‌کنیم:

سال گذشته با مفهوم اعداد طبیعی آشنا شدیم، به بار دیگه این مجموعه رو تعریف می‌کنیم:

اعداد طبیعی: مجموعه اعداد طبیعی که اونا رو با N نمایش میدیم، اعدادی هستند که ما برای شمارش ازشون استفاده می‌کنیم، یعنی مجموعه زیر:

$$N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, \dots\}$$

حالا میفوییم روش جدیدی برای نمایش مجموعه‌ها معرفی کنیم، این روش از نمادهای ریاضی برای نمایش استفاده میکنه

فرض کنید که میفوییم مجموعه اعداد زوج رو نمایش بدیم، یه روش که قبلا یاد گرفتیم به این صورت بود:

$$E = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

حالا میفوییم این مجموعه رو با نمادهای ریاضی نشون بدیم:

اول بیاید ببینیم این مجموعه چطوری ساخته میشه. یه بار دیگه مجموعه اعداد طبیعی رو که در بالا معرفی کردیم نگاه کنید، آیا ارتباطی بین این دو تا مجموعه می‌بینید؟

کاملاً درست گفتید، آگه ما عضوهای مجموعه اعداد طبیعی رو در ۲ ضرب کنیم، مجموعه اعداد زوج تشکیل میشه:

$$E = \{2 \times 1, 2 \times 2, 2 \times 3, 2 \times 4, 2 \times 5, \dots\} = \{2, 4, 6, 8, 10, \dots\}$$

حالا آگه هر عضو مجموعه طبیعی رو با k نشون بدیم، یعنی به جای ۱ و ۲ و ... بزاریم k داریم:

$$E = \{2 \times k, 2 \times k, 2 \times k, 2 \times k, 2 \times k, \dots\}$$

که آگه به صورت فاصله بنویسیم داریم:

$$E = \{2k \mid k \in N\}$$

ما تونستیم یه مجموعه رو با نماد ریاضی نشون بدیم ☺

یه مثال دیگه حل کنیم:

فرض کنید میفوییم مجموعه $A = \{7, 8, 9, 10\}$ رو با نماد ریاضی نشون بدیم.
اول از همه باید یه تعریف واسه اعضای مجموعه پیدا کنیم، اگه من از شما بفوام که
بوم بگید مجموعه A ، عضوهایش چیه؟ میگوید ۷ و ۸ و ۹ و ۱۰
هالا اگه بگم عضوها رو دونه دونه نگیه، مجموعه رو چطوری تعریف می کنید؟ یه کم فکر
کنید...

هتما می گید عدد های بیشتر از ۶ و کمتر از ۱۱

یا می گید عدد های بین ۶ و ۱۱

اینو چطوری بنویسیم؟

$6 < \text{عددهای طبیعی} < 11$

کاملا درسته، هالا یه کم ریاضی ترش کنیم، به جای عدد های طبیعی می نویسیم k و بعدش
میگیم منظورمون از k عدد های طبیعی. به صورت زیر:

$$A = \{6 < k < 11 \mid k \in \mathbb{N}\}$$

می بینید چه راحتی؟ فقط کافیه شما بتونید اعضای مجموعه رو با زبون فارسی معرفی کنید،
بعدش به راحتی میتونید با نمادهای ریاضی بنویسیدش.

حل تمرین صفحه ۱۰

۱- مجموعه $A = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ را در نظر بگیرید. کدام یک از مجموعه‌های زیر با هم برابر است؟

$$B = \{x | x \in A, x^2 \leq 2\}, \quad C = \{x | x \in A, -1 \leq x \leq 1\}, \quad D = \{x | x \in A, x^2 = 1\}$$

اول از همه عضوهای مجموعه‌های B, C, D رو می‌نویسیم:

مجموعه‌ی B چه عضوهایی داره؟

عضوهای A که وقتی اون‌ها رو به توان ۲ می‌رسونیم، کوچکتر یا مساوی ۲ باشه. کدوم عضوهای A این خصوصیت رو دارن؟

عضوهای مجموعه A رو به توان ۲ می‌رسونیم:

$$0^2 = 0, \quad 1^2 = 1, \quad 2^2 = 4, \quad (-1)^2 = 1, \quad (-2)^2 = 4$$

توان دوم کدوم عضو کوچکتر مساوی ۲ میشه:

$$B = \{-1, 0, 1\}$$

عضوهای مجموعه‌ی C رو هم می‌نویسیم:

اعضای این مجموعه، عضوهایی از A هستن که کوچکتر مساوی ۱ و بزرگتر مساوی -۱ هستن، یعنی عضوهای زیر:

$$C = \{-1, 0, 1\}$$

مجموعه‌ی D چه عضوهایی داره:

عضوهایی از مجموعه A که توان چهارم آنها برابر ۱ باشد، بنابراین:

$$D = \{ -1, 1 \}$$

بنابراین مجموعه‌های C و D با هم برابرند.

ادامه تمرینها رو می‌تونید در "کانال خصوصی حل تمرین و نمونه سوال" ببینید ☺
در صورت تمایل به عضویت، به ازمین کانال مراجعه کنید.

آموزش گام به گام ریاضی چهارم تا دهم در سایت:

www.riazibaham.ir

و کانال‌های @RiaziBaHam و @RiaziBaHam9

برای دریافت جزوات سایر پایه‌ها، تمرینهای حل شده و نمونه سوالات

امتثانی حل شده، به "ریاضی با هم" پیوندید.